### Δραστηριότητα: Η ΠΙΣΙΝΑ

**Διάρκεια της δραστηριότητας:** 1-2 διδακτικές ώρες

**Τάξη:** Β΄ Λυκείου

**Γνωστικό αντικείμενο:**

* Ο νόμος των ημιτόνων

**Η κατάσταση προβλήματος**

Ο υπολογισμός της ακτίνας ενός κύκλου, όταν είναι γνωστή μία εγγεγραμμένη γωνία και η αντίστοιχη χορδή, μπορεί να αποτελέσει το μαθηματικό περιεχόμενο πραγματικών προβλημάτων. Ο κύκλος μπορεί να είναι το μαθηματικό μοντέλο μιας πισίνας, ενώ η εγγεγραμμένη γωνία μπορεί να προέρχεται από ένα γωνιόμετρο τοποθετημένο στην περιφέρειά της.

Οι μαθητές, με βάση ένα πρόβλημα υπολογισμού της ακτίνας μιας πισίνας, θα εντοπίσουν τη σχέση που συνδέει το ημίτονο μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

**Φύλλο εργασίας**

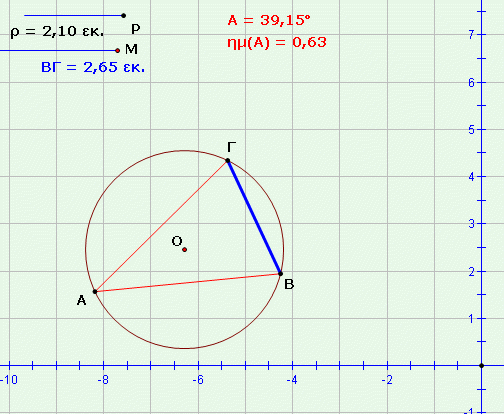
###### Β

###### Γ

**Α**

Ο άνθρωπος στην παραπάνω εικόνα θέλει να υπολογίσει την ακτίνα της πισίνας, στην οποία όμως δεν έχει πρόσβαση, αφού είναι γεμάτη νερό. Διαθέτει ένα γωνιόμετρο, ένα όργανο δηλαδή με το οποίο μπορεί να μετρήσει τη γωνία ΒΑΓ, ενώ γνωρίζει ήδη την απόσταση ΒΓ των δύο πασάλων που βρίσκονται στα σημεία Β και Γ της περιφέρειας της πισίνας. Ας προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό μέσα από μια προσομοίωσή του.

Ανοίξτε το αρχείο Metrisi pisinas του λογισμικού. Στην οθόνη προβάλλονται:



Ένας κύκλος κέντρου Ο, στον οποί έχει εγγραφεί ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Η κορυφή Α μπορεί να κινείται πάνω στον κύκλο με σύρσιμο.

Δύο μεταβολείς με άκρα Ρ και Μ, με τους οποίους μπορούμε να μεταβάλλουμε την ακτίνα ρ του κύκλου και το μήκος της πλευράς ΒΓ, αντίστοιχα.

Οι μετρήσεις της ακτίνας ρ και της πλευράς (χορδής) ΒΓ.

Η μέτρηση της γωνίας Α του τριγώνου, καθώς και το ημίτονο της γωνίας.

Ένα κουμπί βοήθειας με το οποίο εμφανίζονται υποδείξεις για την κατασκευή ενός δυναμικού σημείου με συγκεκριμένες συντεταγμένες.

Ένα δεύτερο κουμπί βοήθειας, το οποίο θα σας χρησιμεύσει όταν κληθείτε να κάνετε κάποια απόδειξη.

1. Σύρετε το σημείο Ρ και στη συνέχεια το σημείο Μ. Σημειώστε τα ποσά που μεταβάλλονται κάθε φορά.
2. Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ποσών αυτών. Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Ρ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;
3. Παρατηρήστε και καταγράψτε αρκετές μετρήσεις των ποσών που μεταβάλλονται, μόλις σύρετε το σημείο Μ. Φαίνεται από τις μετρήσεις να ισχύει κάποια σχέση;
4. Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ρ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την ακτίνα ρ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;
5. Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.
6. Κατασκευάστε ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημ(Α), ΒΓ) και εμφανίστε το ίχνος του. Μεταβάλετε την πλευρά ΒΓ. Διαπραγματευτείτε την καμπύλη που φαίνεται να διαγράφει το δυναμικό σημείο. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο ποσά;
7. Με τη βοήθεια των μετρήσεων επιβεβαιώστε ή απορρίψτε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.
8. Διατυπώστε μία πρόταση με την οποία θα εκφράζετε τον τρόπο που συνδέονται τα ποσά ΒΓ, Ρ, ημ(Α).
9. Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να περιγράψετε στον άνθρωπο του αρχικού προβλήματος μία διαδικασία με την οποία θα καταφέρει να μετρήσει την ακτίνα της πισίνας. Τι θα τον συμβουλεύατε να κάνει, χρησιμοποιώντας και το γωνιόμετρο;
10. Ωστόσο, μία πρόταση, η οποία στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και γραφικές παραστάσεις, κινδυνεύει να θεωρηθεί μη έγκυρη από αυστηρά μαθηματική άποψη. Κάντε μία γενική απόδειξη της πρότασης, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη βοήθεια από την οθόνη.

**Οδηγίες και προτάσεις υλοποίησης**

Αρχικά ο διδάσκων ζητά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν την προσομοίωση της πραγματικής κατάστασης στο αρχείο που ήδη έχουν ανοίξει.

* Στόχος της πρώτης άσκησης είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι με το σημείο Ρ μεταβάλλεται η ακτίνα, η γωνία Α και το ημίτονό της, ενώ με το σημείο Μ μεταβάλλεται η χορδή ΒΓ, η γωνία Α και το ημίτονό της.
* Στη δεύτερη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η ακτίνα ρ, μειώνεται η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για την ακτίνα ρ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.
* Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές αναμένεται να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνεται η χορδή ΒΓ, αυξάνεται και η τιμή του ημιτόνου της γωνίας Α. Ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να ελέγξουν αν τα δύο ποσά είναι ανάλογα, επιλέγοντας και καταγράφοντας τις κατάλληλες τιμές για το τμήμα ΒΓ και τις αντίστοιχες τιμές του ημιτόνου της γωνίας Α.
* Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ρ, ημΑ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το κατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα καμπύλης που παραπέμπει σε υπερβολή και αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.
* Στην πέμπτη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της ακτίνας ρ, το γινόμενο θα παραμείνει σταθερό.
* Στην έκτη άσκηση οι μαθητές θα κατασκευάσουν ένα δυναμικό σημείο με συντεταγμένες (ημΑ, ΒΓ), εμφανίζοντας όμως τις αντίστοιχες οδηγίες με το ακατάλληλο κουμπί. Το ίχνος του δυναμικού σημείου θα διαγράψει τμήμα ευθείας που παραπέμπει σε ανάλογα ποσά. Με τον τρόπο αυτό θα ενισχυθεί η αρχική εικασία για τη σχέση των δύο αυτών ποσών.
* Στην έβδομη άσκηση οι μαθητές θα βρουν το λόγο των αντίστοιχων τιμών των δύο ποσών και θα διαπιστώσουν ότι αν μεταβάλλουν τις τιμές της χορδής ΒΓ, ο λόγος των δύο ποσών θα παραμείνει σταθερός και μάλιστα θα είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας.
* Στην όγδοη άσκηση μπορεί πλέον να γίνει μία διατύπωση του νόμου η οποία θα έχει τη μορφή: «Αν ένα τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε ο λόγος μιας πλευράς προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας είναι σταθερός και ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας».
* Με βάση τον παραπάνω κανόνα, και ιδιαίτερα τη γραμμική σχέση που έχουν ανακαλύψει, οι μαθητές μπορούν να περιγράψουν έναν τρόπο υπολογισμού της απόστασης δύο σημείων που βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου γνωστής ακτίνας.
* Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές θα κάνουν μία απόδειξη του νόμου των ημιτόνων. Συγκεκριμένα, με το κουμπί της βοήθειας για την απόδειξη θα εμφανίσουν το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ, του οποίου η γωνία Δ είναι ίση με την Α και στο συγκεκριμένο τρίγωνο ισχύει ΒΓ/ημ(Δ)=2ρ.

