

1.3.4 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ επεξεργασίας δεδομένων

Μάθημα του προγράμματος	Μαθήματα Πληροφορικής και Τεχνολογίας
Διδακτικές ώρες	Ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών από 2 ως 3 ώρες
Διδακτικό αντικείμενο	Εξοικείωση με το δυαδικό σύστημα
Χρονισμός με το αναλυτικό πρόγραμμα	Β' τρίμηνο (στην Α' και Β' Λυκείου)
Διδακτική μέθοδος	Επίδειξη, προσωπική εργασία μαθητών με την καθοδήγηση του διδάσκοντος, ομαδική εργασία, ομαδική αναζήτηση λύσεων σε προβλήματα.
Διδακτικός στόχος	<p>Το σύστημα επεξεργασίας δεδομένων σε έναν ΗΥ αποτελεί ένα τυπικό σύστημα του ΗΥ το οποίο γίνεται κατανοητό όταν εξεταστούν τόσο η τεχνολογία του όσο και οι μαθηματικές βάσεις της λειτουργίας του.</p> <p>Οι δραστηριότητες του παρόντος κεφαλαίου αποσκοπούν στην κατανόηση αυτής της σύζευξης μεταξύ των δυο όψεων της επεξεργασίας δεδομένων. Ορισμένες δραστηριότητες είναι επικεντρωμένες στις ιδιότητες του δυαδικού συστήματος – αλλά και όλων των θεσιακών συστημάτων αρίθμησης – και της πρόσθεσης στο δυαδικό σύστημα. Απώτερος στόχος είναι και πάλι η κατανόηση μερικών αναλλοίωτων ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν όλα τα συστήματα αρίθμησης.</p>

1. Παρακολούθησε τον τρόπο με τον οποίο το λογισμικό μετατρέπει έναν αριθμό από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα, πρώτα με βηματική εκτέλεση και στη συνέχεια με εκτέλεση κανονική
2. Διάλεξε έναν αριθμό στη δεκαδική του μορφή στην τύχη (ή άσε το λογισμικό να διαλέξει ένα για σένα) και μετάτρεψε το σε δυαδική μορφή.

3. Διάλεξε έναν αριθμό στην τύχη και μετάτρεψε τον στο δυαδικό σύστημα, κάνοντας όμως ένα λάθος – δηλαδή διαλέγοντας μια δύναμη του δυο η οποία κανονικά δεν υπάρχει στη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού. Τι θα συμβεί στη συνέχεια;

Ο αλγόριθμος ο οποίος είναι ενσωματωμένος στο ΔΕΛΥΣ λειτουργεί ακόμη και με λανθασμένες επιλογές από το χρήστη: ο μαθητής μπορεί να εφαρμόσει οιαδήποτε κριτήρια επιλογής επιθυμεί, αυτά που αυθόρμητα επιλέγει, χωρίς αντίδραση από το σύστημα. Ο αλγόριθμος θα του επισημάνει την αναγκαία αλλαγή στρατηγικής μόνο σε περίπτωση αδιεξόδου.

4. Αν ένας αριθμός A γραφεί με δυαδική μορφή, τότε ισχύει η εξής ισότητα:

$$A = 2^v C_v + 2^{v-1} C_{v-1} + \dots + 2^0 C_0 = C_0 + 2(C_1 + 2(C_2 + \dots)) \dots \text{ (σχήμα Horner)}$$

όπου βέβαια τα C_i είναι 0 ή 1. Μήπως αυτή η μορφή θα μπορούσε να δώσει ιδέες για έναν άλλο αλγόριθμο μετατροπής της παράστασης ενός αριθμού από τη δεκαδική στη δυαδική του μορφή;

Στο σχήμα Horner στηρίζεται η κλασική μέθοδος μετατροπής ενός αριθμού από το δεκαδικό στο δυαδικό – ή σε άλλο – σύστημα: ο αριθμός διαιρείται με το 2 και το πηλίκο διαιρείται και πάλι με το 2 έως ότου το πηλίκο γίνει 0. Τα υπόλοιπα των διαδοχικών διαιρέσεων, γραμμένα με αντίστροφη φορά από εκείνη της εκτέλεσης των διαιρέσεων, δίνουν τη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού.

- 5. Με βάση τη μέθοδο της προηγούμενης άσκησης θα μπορούσες να βρεις μια μέθοδο για τη μετατροπή της παράστασης ενός αριθμού από δεκαδικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο; Ακόμη και σε ένα σύστημα με βάση μεγαλύτερη από το 10;**

Ισχύει βέβαια ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στην προηγούμενη δραστηριότητα. Για συστήματα με βάση μεγαλύτερη του 10, θα πρέπει κάθε υπόλοιπο που είναι μεγαλύτερο του 9 να αντικατασταθεί με ένα ιδιαίτερο σύμβολο – όπως για παράδειγμα στο δεκαεξαδικό χρησιμοποιούνται τα γράμματα Α,Β,С, D, E, F.

- 6. Με βάση τη δυαδική αναπαράσταση ενός αριθμού μπορείς να βρεις έναν εύκολο τρόπο να προσδιορίσεις τη αναπαράσταση ενός αριθμού σε οκταδική και δεκαεξαδική μορφή;**

Η μέθοδος είναι αρκετά εύκολη. Για τη μετατροπή στο οκταδικό σύστημα, κάθε τριψήφιο τμήμα του αριθμού στη δυαδική μορφή (εκ δεξιών προς τα αριστερά) μετατρέπεται σε ένα οκταδικό ψηφίο. Για μετατροπή στο δεκαεξαδικό, κάθε τετραψήφιο τμήμα μετατρέπεται σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο. Για παράδειγμα ο αριθμός $A = (1000101101011)_2$, θα μετατραπεί στο οκταδικό ως εξής:

Έχει 13 ψηφία, άρα θα προστεθούν 2 μηδενικά στην αρχή: $A = (001000101101011)_2$

Μετά χωρίζεται σε τριψήφια τμήματα: $A = 001\ 000\ 101\ 101\ 101\ 011$

Κάθε τμήμα αντικαθίσταται από ένα οκταδικό ψηφίο: $A = (105553)_8$

- 7. Κάνε έναν πίνακα της δυαδικής αναπαράστασης των αριθμών από το 1 ως το 100 (με σταθερό αριθμό ψηφίων). Παρατηρείς κάποια κανονικότητα στην αναπαράσταση αυτή; Θα μπορούσες να συνεχίσεις εφαρμόζοντας απλώς τους κανόνες που διέπουν τη διαδοχή αυτών των αναπαρασάσεων;**

Η «αντικατάσταση» των 0 από 1 παρουσιάζει ένα είδος κανονικότητας το οποίο μπορούν να εκμεταλλευτούν οι μαθητές για να «παράγουν» τις δυαδικές αναπαρασάσεις των διαδοχικών ακεραίων.

- 8. Μπορείς να βρεις διάφορες χρήσιμες προτάσεις για την δυαδική αναπαράσταση αριθμών; Για παράδειγμα, υπάρχει κριτήριο για να διαπιστωθεί αν ένας αριθμός είναι άρτιος ή περιττός; Πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 4; με το 8; συνδυάζοντας και αντίστοιχα κριτήρια από το δεκαδικό σύστημα, θα μπορούσες να γενικεύσεις για όλα τα αριθμητικά συστήματα;**

Προφανώς ένας αριθμός είναι άρτιος αν (η δυαδική του αναπαράσταση) λήγει σε 0. Διαιρείται με το 4 αν λήγει σε 00 κοκ. Στο δεκαδικό σύστημα ισχύει το ανάλογο: ένας αριθμός διαιρείται με το 10 αν (η δεκαδική του αναπαράσταση) λήγει σε 0, με το 100 αν λήγει σε 00 κοκ. Ανάλογες προτάσεις ισχύουν και για τα άλλα συστήματα.

- 9. Θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις τη δυαδική αναπαράσταση διαδοχικών αριθμών για να βρεις μια βέβαιη μέθοδο ώστε να παράγεις όλα τα υποσύνολα ενός τυχαίου συνόλου;**

Έστω ένα σύνολο με 8 στοιχεία. Τότε αυτό έχει 256 υποσύνολα. Τώρα, οι δυαδικές αναπαρασάσεις των αριθμών 0 έως $2^8 - 1$ περιέχουν από 0 έως 8 «1» χωρίς να υπάρχει καμιά σύμπτωση – προφανώς. Υπάρχει λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα. Κάθε δυαδική αναπαράσταση ενός αριθμού μας δείχνει ποια στοιχεία του Α πρέπει να επιλέξω για το επόμενο υποσύνολο. Για παράδειγμα, έστω το σύνολο: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

0 = 00000000

1 = 00000001

2 = 00000010

3 = 00000011

4 = 00000100

...

127 = 11111111

Τότε ο αριθμός 11 = 00001011 «παράγει» το υποσύνολο {5,7,8} κοκ.

10. Θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις τις δυαδικές αναπαραστάσεις διαδοχικών αριθμών για να επιλύσεις το πρόβλημα του πύργου του Hanoi;

Η επίλυση του προβλήματος του Hanoi με τη βοήθεια του δυαδικού συστήματος, στηρίζεται κατ' αρχάς στην παρατήρηση ότι τα δυο συστήματα έχουν την «ίδια κανονικότητα». Θεωρούμε ότι οι τρεις στύλοι του Hanoi είναι τοποθετημένοι δεξιόστροφα (όπως κινούνται οι δείκτες ενός ρολογιού) στις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ ενώ οι δίσκοι είναι όλοι τοποθετημένοι στο στύλο Α.

Θεωρούμε ότι αν το πλήθος των δίσκων που πρόκειται να μετακινηθούν είναι άρτιο τότε η λύση έχει «πολικότητα» 0, αλλιώς έχει «πολικότητα» 1.

Έστω ότι πρόκειται να επιλύσουμε το πρόβλημα για N δίσκους. Τότε μετατρέπουμε σε δυαδική μορφή τους αριθμούς από 1 ως N και τους γράφουμε διαδοχικά. Κάθε αριθμός αντιστοιχεί σε μια κίνηση στον πύργο του Hanoi.

Κάθε κίνηση στον πύργο του Hanoi καθορίζεται ως εξής:

- Από πού θα πάρω δίσκο;
 - ◊ Αν η δυαδική αναπαράσταση έχει μόνον ένα «1» τότε μετακινώ ένα δίσκο από το στύλο Α.
 - ◊ Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις εφαρμόζω τον εξής κανόνα: αποκόπτω το δεξιότερο στοιχείο και λαμβάνω τον δυαδικό αριθμό που προκύπτει. Στον αριθμό αυτό προσθέτω 1 και την «πολικότητα» ης λύσης. Το υπόλοιπο της διαιρέσεως δια 3 μου δίνει τον δίσκο από τον οποίο θα πάρω τον επόμενο δίσκο.
- Προς τα που θα μετακινήσω τον δίσκο;
 - ◊ Εξ δεξιών προς τα αριστερά αναζητώ το πρώτο «1» (δηλαδή το δεξιότερο) μέσα στη δυαδική αναπαράσταση του αριθμού. Αν η λύση έχει «πολικότητα» 0, τότε αν το ένα είναι σε άρτια θέση, η μετακίνηση θα είναι αριστερόστροφη, αλλιώς θα είναι δεξιόστροφη. Αν η λύση έχει «πολικότητα» 1, ισχύουν τα αντίστροφα.

11. Έστω ότι έχεις μια ομάδα από 10 άτομα και θέλεις να σχηματίσεις μια ομάδα 4 ατόμων. Ποιες είναι οι ομάδες που μπορούν να σχηματιστούν; Η δυαδική αναπαράσταση των αριθμών θα μπορούσε να σε βοηθήσει να επιλύσεις το πρόβλημα αυτό;

Όπως και στο πρόβλημα 30, από τις δυαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών 0 έως $2^{10}-1$ επιλέγονται όλες εκείνες που έχουν ακριβώς 4 «1». Πώς εξασφαλίζεται το γεγονός ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα δυο σύνολα; Διότι προφανώς οι αντίστοιχες δυαδικές αναπαραστάσεις είναι όσοι και οι ζητούμενοι συνδυασμοί.

12. Παρατήρησε την εκτέλεση της πρόσθεσης με βηματικό τρόπο και με κανονική εκτέλεση.

Διάλεξε δυο αριθμούς στην τύχη και εκτέλεσε την πρόσθεση εφαρμόζοντας τους κανόνες που προσδιορίζει ο πίνακας.

13. Παρατήρησε τους κανόνες της πρόσθεσης. Οι κανόνες της πρόσθεσης και του υπολοίπου («κρατούμενου») έχουν τους αντίστοιχους κανόνες στο δεκαδικό σύστημα; Μπορείς να γενικεύσεις;

14. Θα μπορούσες να επινοήσεις μια μέθοδο για την πρόσθεση πολλών δυαδικών μαζί;
15. Δεδομένου ενός αριθμού, ποιον αριθμό πρέπει να διαλέξεις ώστε το δυαδικό άθροισμα τους να είναι όλο μηδενικά (εκτός βέβαια του πρώτου ψηφίου που θα είναι 1); Ποιον αριθμό πρέπει να διαλέξεις ώστε το δυαδικό άθροισμα τους να είναι όλο 1;
16. Δώσε ορισμένους χαρακτήρες και παρατήρησε τη μετατροπή τους με τον κώδικα ASCII. Δοκίμασε τους χαρακτήρες ABCD, abcd, ΑΒΓΔ, αβγδ. Παρατηρείς κάποια κανονικότητα; Δοκίμασε και άλλους χαρακτήρες (αριθμητικά ψηφία κλπ).
- Λόγω της δομής του κώδικα ASCII, θα παρουσιάζεται μια σταθερή διαφορά 26 θέσεων.
17. Θεώρησε έναν τριψήφιο αριθμό – έστω το 127. Μετάτρεψε τον σε δυαδική μορφή. Στη συνέχεια παρατήρησε πως το σύστημα αποθηκεύει τη συμβολοσειρά «0127». Βρές ακόμη ποιο σύμβολο αντιστοιχεί στο 127 του κώδικα ASCII και δες πως αποθηκεύεται το σύμβολο αυτό. Μπορείς να συνοψίσεις τα συμπεράσματά σου;
- Ο βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι η κατανόηση των διαφόρων αναπαριστατικών συστημάτων που συνυπάρχουν στον ΗΥ καθώς και η κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα σε έναν αριθμό και μια συμβολοσειρά με τα ίδια ψηφία.
18. Δοκίμασε τη λειτουργία των λογικών πυλών.
19. Δοκίμασε τη λειτουργία των δυο κυκλωμάτων (ημιαθροιστή και αθροιστή) και παρατήρησε τα αποτελέσματα. Μπορείς να ερμηνεύσεις το αποτέλεσμα;
20. Πως υλοποιούνται οι πύλες αυτές. Ψάξε στο διαδίκτυο ή σε άλλες πηγές. Θα μπορούσες να σκεφθείς τρόπους υλοποίησης των πυλών αυτών;
21. Η λειτουργία του αθροιστή θα μπορούσε να γενικευθεί έτσι ώστε να παράγει το άθροισμα δυο πολυψήφιων δυαδικών αριθμών; Με ποιο τρόπο;
22. Οι πύλες αυτές είναι όλες απαραίτητες; Μήπως κάποιοι συνδυασμοί μερικών από αυτές μπορούν να δώσουν το λογικό ισοδύναμο της τρίτης;
23. Θα μπορούσες συνδυάζοντας τις πύλες αυτές να δημιουργήσεις το λογικό ισοδύναμο μιας πύλης NOR, NAND; (οι οποίες είναι οι αντίθετες της OR και της AND αντίστοιχα);